

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΜΑΪΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A)** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x^2$ . Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = 2x.$$

**Μονάδες 10**

**B)** Ας υποθέσουμε ότι  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$ , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  (όπου  $k \leq n$ ),  $v_i$  είναι η συχνότητα και  $f_i$  είναι σχετική συχνότητα της τιμής  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.*

**α)** Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής  $X$  είναι ίσο με 100.

**β)** Η μέση τιμή  $\bar{x}$  ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

**γ)** Για τη σχετική συχνότητα  $f_i$  ισχύει ότι  $f_i > 1$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**δ)** Ο συντελεστής μεταβολής  $CV$  ορίζεται (για  $\bar{x} \neq 0$ ) από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} .$$

**ε)** Η διακύμανση (ή διασπορά) της μεταβλητής  $X$  ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i \quad .$$

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [ - )	Αθροιστική συχνότητα $N_i$
0 – 2	5
2 – 4	15
4 – 6	20
6 – 8	35
8 – 10	40

Να βρείτε:

**α)** το μέγεθος του δείγματος,

**Μονάδες 5**

**β)** τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και

**Μονάδες 10**

**γ)** τη μέση τιμή.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε:

**α)** το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ ,

**Μονάδες 5**

**β)** το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,

**Μονάδες 5**

**γ)** την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ ,

**Μονάδες 5**

**δ)** τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και

**Μονάδες 5**

**ε)** τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 4, \quad t_6 = 5 .$$

**α)** Να βρείτε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  των παρατηρήσεων.

**Μονάδες 6**

**β)** Αν  $f(x) = (t_1-x)^2 + (t_2-x)^2 + (t_3-x)^2 + (t_4-x)^2 + (t_5-x)^2 + (t_6-x)^2$ ,

τότε:

**i)** να αποδείξετε ότι  $f'(\bar{x}) = 0$

**Μονάδες 6**

**ii)** να αποδείξετε ότι  $f(\bar{x}) = 6s^2$ , όπου  $s^2$  είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και

**Μονάδες 5**

**iii)** να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$ .

**Μονάδες 8**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ****ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Σελίδα 28 Σχολικού Βιβλίου

- B.**
- α)** Λάθος
  - β)** Σωστό
  - γ)** Λάθος
  - δ)** Σωστό
  - ε)** Σωστό

## ΘΕΜΑ 2°

α)  $v = 40$

β) Οι συχνότητες και οι σχετικές συχνότητες των κλάσεων παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Κλάση	$x_i$	$v_i$	$N_i$	$f_i$	$x_i v_i$
0 - 2	1	5	5	$\frac{5}{40} = 0,125$	5
2 - 4	3	10	15	$\frac{10}{40} = 0,25$	30
4 - 6	5	5	20	$\frac{5}{40} = 0,125$	25
6 - 8	7	15	35	$\frac{15}{40} = 0,375$	105
8 - 10	9	5	40	$\frac{5}{40} = 0,125$	45
		40		1	210

γ)  $\bar{x} = \frac{1}{v} \sum x_i v_i$  ή  $\bar{x} = \frac{210}{40}$  ή  $\bar{x} = 5,25$

## ΘΕΜΑ 3°

α) 
$$\begin{cases} \psi = f(x) \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2}{4x^2 + 5} = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \psi = 0 \end{cases}$$



Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $O(0, 0)$ .

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{4x^2 + 5} = \frac{3 \cdot 0^2}{4 \cdot 0^2 + 5} = 0$

γ) 
$$f'(x) = \left( \frac{3x^2}{4x^2 + 5} \right)' = \frac{(3x^2)'(4x^2 + 5) - 3x^2(4x^2 + 5)'}{(4x^2 + 5)^2} = \frac{6x(4x^2 + 5) - 3x^2(8x)}{(4x^2 + 5)^2} =$$
$$= \frac{24x^3 + 30x - 24x^3}{(4x^2 + 5)^2} = \frac{30x}{(4x^2 + 5)^2}$$

$$\delta) f'(x) > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{30x}{(4x^2 + 5)^2} > 0 \quad \text{ή} \quad 30x > 0 \quad \text{ή} \quad x > 0$$

επειδή  
 $4x^2 + 5 > 0$  στο  $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)		ελάχιστο	

Από τον πίνακα προσήμων της  $f'$  προκύπτει ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

ε) Για  $x = 0$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $f(0) = 0$ .

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

$$\alpha) \bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6}{6} = \frac{0 + 0 + 1 + 2 + 4 + 5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι 6 (άρτιος) διάμεσος θα είναι το ημίθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\text{Δηλ. } \delta = \frac{t_3 + t_4}{2}$$

$$\delta = \frac{1 + 2}{2} = 1,5$$

$$\beta) \text{ i) } f'(x) = \left[ (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + (t_3 - x)^2 + (t_4 - x)^2 + (t_5 - x)^2 + (t_6 - x)^2 \right]'$$

$$f'(x) = 2(t_1 - x)(t_1 - x)' + 2(t_2 - x)(t_2 - x)' + 2(t_3 - x)(t_3 - x)' + \\ + 2(t_4 - x)(t_4 - x)' + 2(t_5 - x)(t_5 - x)' + 2(t_6 - x)(t_6 - x)'$$

$$f'(x) = -2(t_1 - x) - 2(t_2 - x) - 2(t_3 - x) - 2(t_4 - x) - 2(t_5 - x) - 2(t_6 - x)$$

$$f'(\bar{x}) = f'(2) = -2(0 - 2) - 2(0 - 2) - 2(1 - 2) - 2(2 - 2) - 2(4 - 2) - 2(5 - 2) = \\ = -2(-2) - 2(-2) - 2(-1) - 2(0) - 2(2) - 2(3) = \\ = 4 + 4 + 2 + 0 - 4 - 6 = 10 - 10 = 0$$

$$\text{ii) } f(x) = \sum_{i=1}^6 (t_i - x)^2 \quad \text{οπότε} \quad f(2) = \sum_{i=1}^6 (t_i - 2)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \text{όμως} \quad s^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (t_i - 2)^2 \Leftrightarrow 6s^2 = \sum_{i=1}^6 (t_i - 2)^2 \end{array} \right\} f(2) = 6s^2 \quad \text{δηλ.} \quad f(\bar{x}) = 6s^2$$

iii)  $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$

$$\begin{aligned} f(2) &= (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (4 - 2)^2 + (5 - 2)^2 = \\ &= 4 + 4 + 1 + 0 + 4 + 9 = 22 \end{aligned}$$

Άρα  $A(2, 22)$

Η εφαπτομένη στο  $A(2, 22)$  έχει εξίσωση  $\psi = f'(2)x + \beta$   
 όμως  $f'(2) = 0$ .

Άρα  $\psi = \beta$  και επειδή  $A(2, 22)$   $\psi = 22$ .